

CHỦ ĐỀ 12: PHÉP TRỪ CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ.

A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1) Phân thức đối:

- Hai phân thức được gọi là đối nhau nếu tổng của chúng bằng 0.
- Công thức: $-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B}$ và $-\frac{-A}{B} = \frac{A}{B}$.

2) Phép trừ:

- Quy tắc: Muốn trừ phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$, ta cộng $\frac{A}{B}$ với phân thức đối của $\frac{C}{D}$
- Công thức: $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \frac{-C}{D}$

B/ BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Làm tính trừ các phân thức:

a) $\frac{3x-2}{2xy} - \frac{7x-4}{2xy}$;

b) $\frac{3x+5}{4x^3y} - \frac{5-15x}{4x^3y}$;

c) $\frac{4x+7}{2x+2} - \frac{3x+6}{2x+2}$;

d) $\frac{9x+5}{2(x-1)(x+3)^2} - \frac{5x-7}{2(x-1)(x+3)^2}$;

e) $\frac{xy}{x^2-y^2} - \frac{x^2}{y^2-x^2}$;

f) $\frac{5x+y^2}{x^2y} - \frac{5y-x^2}{xy^2}$;

g) $\frac{x}{5x+5} - \frac{x}{10x-10}$;

h) $\frac{x+9}{x^2-9} - \frac{3}{x^2+3x}$;

i) $\frac{3}{2x+6} - \frac{x-6}{2x^2+6x}$;

j) $x^2+1 - \frac{x^4-3x^2+2}{x^2-1}$;

k) $\frac{x+1}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} - \frac{2x(1-x)}{9-x^2}$;

l) $\frac{3x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{x+3}{1-x^2}$;

n) $\frac{5}{2x^2+6x} - \frac{4-3x^2}{x^2-9} - 3$;

m) $\frac{3x+2}{x^2-2x+1} - \frac{6}{x^2-1} - \frac{3x-2}{x^2+2x+1}$.

Bài 2. Theo định nghĩa của phép trừ, khi viết

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} - \frac{E}{F} = \frac{A}{B} + \frac{-C}{D} + \frac{-E}{F}.$$

Áp dụng điều này để làm các phép tính sau:

$$a) \frac{1}{3x-2} - \frac{1}{3x+2} - \frac{3x-6}{4-9x^2};$$

$$b) \frac{18}{(x-3)(x^2-9)} - \frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{x}{x^2-9}.$$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức :

$$a) \frac{3x^2+5x+1}{x^3-1} - \frac{1-x}{x^2+x+1} - \frac{3}{x-1};$$

$$b) \frac{1}{x^2-x+1} + 1 - \frac{x^2+2}{x^3+1};$$

$$c) \frac{7}{x} - \frac{x}{x+6} + \frac{36}{x^2+6x}.$$

Bài 4. Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} - \frac{3}{(x-3)(x-1)};$$

$$b) A = \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} - \frac{1}{(a-c)(c-b)}.$$

Bài 5. Tính giá trị của các biểu thức:

$$a) A = \frac{1}{x^2-x+1} + 1 - \frac{x^2+2}{x^3+1} \text{ với } x = 99;$$

$$b) B = \frac{2x+1}{4x-2} + \frac{1-2x}{4x+2} - \frac{2}{1-4x^2} \text{ với } x = \frac{1}{4}.$$

C/ CÁC BÀI TOÁN NÂNG CAO

Bài 6. Rút gọn các biểu thức :

$$a) A = \frac{a}{x(x+a)} + \frac{a}{(x+a)(x+2a)} + \frac{a}{(x+2a)(x+3a)} + \frac{1}{x+3a};$$

$$b) B = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \dots + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)};$$

HD:

$$b) \text{ Thực hiện nhân hai vế với 3 ta được } 3.B = \frac{3}{2.5} + \frac{3}{5.8} + \frac{3}{8.11} + \dots + \frac{3}{(3n+2)(3n+5)}$$

$$\text{Từ đó ta có } \frac{3}{(3n+2)(3n+5)} = \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5}$$

$$\text{Xét từng số hạng cụ thể : } \frac{3}{2.5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}; \frac{3}{5.8} = \frac{1}{5} - \frac{1}{8}; \dots; \frac{3}{(3n+2)(3n+5)} = \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5}$$

$$\frac{3}{2.5} + \frac{3}{5.8} + \frac{3}{8.11} + \dots + \frac{3}{(3n+2)(3n+5)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3n+5} = \frac{3n+5-2}{2(3n+5)} = \frac{3(n+1)}{2(3n+5)}$$

$$\text{Hay } 3.B = \frac{3(n+1)}{2(3n+5)} \Leftrightarrow B = \frac{n+1}{2(3n+5)}$$

$$\text{c) } C = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

HD : Thực hiện như phần trên

Bài 7. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào các biến x, y, z.

$$\frac{x+z}{(x-y)(y-z)} - \frac{x+y}{(x-z)(y-z)} - \frac{y+z}{(x-y)(x-z)}.$$

Bài 8. Thực hiện phép tính :

$$\text{a) } A = \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)};$$

$$\text{b) } B = \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)};$$

$$\text{c) } C = \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)};$$

$$\text{d) } D = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)};$$

Bài 9. Xác định các số hữu tỷ a, b, c sao cho:

$$\text{a) } \frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1};$$

Đáp số: Dùng phương pháp đồng nhất ta được $a = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$.

$$\text{b) } \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2};$$

$$\text{ĐS : } a = \frac{1}{2}; b = -1; c = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \frac{1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x+2}.$$

$$\text{ĐS: } a = -1; b = 1; c = 1)$$

Bài 10. Cho $abc = 1$ (1)

$$a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (2)$$

Chứng minh trong 3 số a, b, c tồn tại một số bằng 1.

HD

$$\text{Từ (2) : } a+b+c = \frac{bc+ac+ab}{abc}$$

$$\text{Do } abc = 1 \text{ nên } a+b+c = ab+bc+ca \quad (3)$$

Để chứng minh trong 3 số a, b, c có một số bằng 1 ta chứng minh: $(a-1)(b-1)(c-1) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Xét } (a-1)(b-1)(c-1) &= (ab-a-c+1)(c-1) = (abc-ab-ac+a-bc+b+c-1) \\ &= (abc-1) + (a+b+c) - (ab+bc+ca) \end{aligned}$$

Từ (1) và (3) suy ra biểu thức trên bằng 0, tồn tại một trong ba thừa số a - 1, b - 1, c - 1 bằng 0, do đó tồn tại một trong ba số a, b, c bằng 1.

Bài 11. Cho $3y - x = 6$. Tính giá trị của biểu thức : $A = \frac{x}{y-2} + \frac{2x-3y}{x-6}$.

$$\text{HD : } A = \frac{3y-6}{y-2} + \frac{2x-(x+6)}{x-6} = 3+1=4.$$

Bài 12. Tìm x, y, z biết : $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = \frac{x^2+y^2+z^2}{5}$.

HD:

$$\text{Từ } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = \frac{x^2+y^2+z^2}{5} \text{ suy ra : } \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{5}\right) + \left(\frac{y^2}{3} - \frac{y^2}{5}\right) + \left(\frac{z^2}{4} - \frac{z^2}{5}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{10}x^2 + \frac{2}{15}y^2 + \frac{1}{20}z^2 = 0 \Rightarrow x = y = z = 0.$$

Bài 13. Tìm x, y biết: $x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4$.

HD

$$\text{Ta có } \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) = 4 \Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) + \left(y^2 + \frac{1}{y^2} - 2\right) = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{x} \\ y = \frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Có bốn đáp số như sau:}$$

x	1	1	-1	-1
y	1	-1	1	-1

Bài 14. Cho biết : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ (1), $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$ (2). Chứng minh rằng $a + b + c = abc$.

HD

$$\text{Từ (1) suy ra : } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}\right) = 4$$

$$\text{Do (2) nên : } \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = 1 \Rightarrow \frac{a+b+c}{abc} = 1 \Rightarrow a+b+c = abc$$

Bài 15. Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ (1), $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$ (2). Tính giá trị biểu thức: $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2}$.

HD

$$\text{Từ (1) suy ra : } bcx + acy + abz = 0 \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) suy ra : } \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} + 2\left(\frac{ab}{xy} + \frac{ac}{xz} + \frac{bc}{yz}\right) = 4$$

$$\text{Do đó : } \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 4 - 2\frac{abz + acy + bcx}{xyz} = 4$$

Bài 16. Cho $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ và a, b, c khác 0. CMR: $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$.

HD

$$\text{Từ giả thiết suy ra : } ab + bc + ca = 0.$$

$$\text{Do đó : } \frac{ab+bc+ca}{abc} = 0 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

Sau đó chứng minh rằng nếu $x + y + z = 0$ thì $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Bài 17. Cho $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$. Chứng minh rằng trong ba số a, b, c tồn tại hai số bằng nhau.

HD

$$\text{Từ giả thiết suy ra : } a^2c + ab^2 + bc^2 = b^2c + ac^2 + a^2b \Rightarrow a^2(c-b) - a(c^2 - b^2) + bc(c-b) = 0$$

$$\Rightarrow (c-b)(a^2 - ac - ab + bc) = 0 \Rightarrow (c-b)(a-b)(a-c) = 0$$

Tóm lại một trong các thừa số $c-b, a-b, a-c$ bằng 0. Do đó trong ba số a, b, c tồn tại hai số bằng nhau.

Bài 18. Tìm các giá trị nguyên của x để phân thức sau có giá trị nguyên :

$$\text{a) } A = \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 8}{x-3}; \quad \text{ĐS : } A = 2x^2 + 1 - \frac{5}{x-3} \Rightarrow x \in \{-2; 2; 4; 8\}$$

$$\text{b) } B = \frac{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 1}{x^2 - 2x + 1}; \quad \text{ĐS : } B = x^2 - 4 + \frac{3}{(x-1)^2} \Rightarrow x \in \{0; 2\}$$

$$\text{c) } C = \frac{x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x - 2}{x^2 + 2}. \quad \text{ĐS : } C = x^2 + 3x - \frac{2}{x^2 + 2} \Rightarrow x \in \{0\}$$

Bài 19. Rút gọn biểu thức : $A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$

HD

Rút gọn bằng cách quy đồng từng đôi một :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} \\ &= \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{16}{1-x^{16}} \end{aligned}$$

Chú ý: Khi trình bày phải viết thêm điều kiện để biểu thức có nghĩa.

Bài 20. Rút gọn biểu thức :

$$B = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$$

HD

Ta tách từng phân thức thành hiệu của phân thức rồi dùng phương pháp khử liên tiếp, ta

được : $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$

$$\text{Do đó } B = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$