

CHỦ ĐỀ 6: PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Phân thức đại số:

* Một phân thức đại số (hay nói gọn là phân thức) là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đa thức, B là đa thức khác đa thức 0

A là tử thức (tử).

B là mẫu thức

* Mỗi một đa thức cũng được coi là một đa thức có mẫu là 1.

2. Hai phân thức bằng nhau:

Với hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$, ta nói $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $A.D = B.C$

B/ CÁC DẠNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau.

I/ Phương pháp

* Để chứng minh đẳng thức $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ta cần chứng minh $A.D = B.C$ thì kết luận $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

* Để kiểm tra phân thức $\frac{A}{B}$ có bằng phân thức $\frac{C}{D}$ không thì ta xét các tích $A.D$ và $B.C$

+ Nếu $A.D = B.C$ thì kết luận $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

+ Nếu $A.D \neq B.C$ thì kết luận $\frac{A}{B}$ không bằng $\frac{C}{D}$

* Để tìm mẫu thức (tử thức) chưa biết trong phân thức bằng nhau $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

$$\Leftrightarrow A.D = B.C$$

Từ đó dùng phép chia đa thức (rút gọn nhân tử chung) có được mẫu thức (tử thức) cần tìm.

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1. Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\frac{x^2y^3}{5} = \frac{7x^3y^4}{35xy}$

b) $\frac{x^2(x+2)}{x(x+2)^2} = \frac{x}{x+2}$

c) $\frac{3-x}{3+x} = \frac{x^2-6x+9}{9-x^2}$

d) $\frac{x^3-4x}{10-5x} = \frac{-x^2-2x}{5}$

e) $\frac{5y}{7} = \frac{20xy}{8x}$

f) $\frac{3x(x+5)}{2(x+5)} = \frac{3x}{2}$;

g) $\frac{x+2}{x-1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x^2-1}$

h) $\frac{x^2-x-2}{x+1} = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$

i) $\frac{x^3+8}{x^2-2x+4} = x+2$.

Bài 2. Ba phân thức sau có bằng nhau không?

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-1}; \frac{x+2}{x+1}; \frac{x^2-4}{x^2-x-2}.$$

Bài 2. Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau, hãy tìm đa thức A trong mỗi đẳng thức sau.

a) $\frac{A}{2x-1} = \frac{6x^2+3x}{4x^2-1}$;

b) $\frac{4x^2-3x-7}{A} = \frac{4x-7}{2x+3}$;

c) $\frac{4x^2-7x+3}{x^2-1} = \frac{A}{x^2+2x+1}$;

d) $\frac{x^2-2x}{2x^2-3x-2} = \frac{x^2+2x}{A}$.

Bài 3. Bạn Lan viết các đẳng thức sau và đố các bạn trong nhóm học tập tìm ra chỗ sai. Em hãy sửa sai cho đúng.

a) $\frac{5x+3}{x-2} = \frac{5x^2+13x+6}{x^2-4}$;

b) $\frac{x+1}{x+3} = \frac{x^2+3}{x^2+6x+9}$;

c) $\frac{x^2-2}{x^2-1} = \frac{x+2}{x+1}$;

d) $\frac{2x^2-5x+3}{x^2+3x-4} = \frac{2x^2-x-3}{x^2+5x+4}$.

DẠNG 2: Tìm điều kiện của biến để phân thức có nghĩa, bằng 0, khác 0.

I/ Phương pháp.

* Điều kiện phân thức $\frac{A}{B}$ có nghĩa (Tìm tập xác định) là mẫu thức $B \neq 0$.

Chú ý: Trước khi tìm điều kiện để $\frac{A}{B}$ có nghĩa ta cần phân tích mẫu thức B thành

nhân tử.

* Để phân thức $\frac{A}{B} = 0$ thì $\begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$

* Để phân thức $\frac{A}{B} \neq 0$ thì $\begin{cases} A \neq 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 6. Tìm điều kiện của các phân thức sau:

a) $\frac{3}{5x+2}$

b) $\frac{x^2+3}{x^2-6x+9}$

c) $\frac{x}{x^2+3x}$

d) $\frac{2x+1}{x^2-3x+2}$.

Bài 7. Tìm các giá trị của biến để các biểu thức sau bằng 0.

a) $\frac{3x-1}{x^2-5}$

b) $\frac{x^2-x}{2x+1}$

c) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$

d) $\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

e) $\frac{x^4+x^3+x+1}{x^4-x^3+2x^2-x+1}$

f) $\frac{x^4-5x^2+4}{x^4-10x^2+9}$.

DẠNG 3: Chứng minh một phân thức luôn có nghĩa.

I/ Phương pháp.

Để chứng minh phân thức $\frac{A}{B}$ luôn có nghĩa ta cần chứng minh mẫu thức $B \neq 0$ với mọi giá trị của biến tức là phải biến đổi B về một trong các dạng sau:

$$B = a + [f(x)]^2 \text{ hoặc } B = -a - [f(x)]^2 \quad \text{với số } a > 0$$

$$B = a + |f(x)| \text{ hoặc } B = -a - |f(x)| \quad \text{với số } a > 0$$

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: Chứng minh các phân thức sau luôn có nghĩa:

a) $\frac{-3}{2x^2+7}$

b) $\frac{3x-5}{-(3x-1)^2-2}$

c) $\frac{7x-1}{x^2+2x+4}$

d) $\frac{x^2}{x^2-4x+5}$

e) $\frac{x}{x^2-x+7}$

Bài 2: Chứng minh các phân thức sau luôn có nghĩa:

a) $\frac{x-y}{x^2y^2-2xy+3}$

b) $\frac{2x-y}{x^2+y^2-2x+2}$

DẠNG 4: Tìm GTNN, GTLN của phân thức.

I/ Phương pháp.

$$* T = a + [f(x)]^2 \geq a \text{ Hoặc } T = a + |f(x)| \geq a$$

=> GTNN của T bằng a khi $f(x) = 0$

$$* T = b - [f(x)]^2 \leq b \text{ Hoặc } T = a - |f(x)| \leq a$$

=> GTLN của T bằng b khi $f(x) = 0$

* Nếu $a > 0$ và $T > 0$ thì $\frac{a}{T}$ nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) khi T lớn nhất (hoặc nhỏ nhất)

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: Tìm GTNN của phân thức $\frac{3+|2x-1|}{14}$.

Hướng dẫn

Vì mẫu thức là $14 > 0 \Rightarrow$ phân thức có GTNN khi $3 + |2x - 1|$ có GTNN

Vì $|2x - 1| \geq 0$ nên $3 + |2x - 1| \geq 3$

$\Rightarrow 3 + |2x - 1|$ có GTNN bằng 3 khi $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

\Rightarrow GTNN của phân thức $\frac{3+|2x-1|}{14}$ bằng $\frac{3}{14}$

Bài 2: Tìm GTLN của phân thức $\frac{-4x^2+4x}{15}$

Hướng dẫn

Vì mẫu thức là $15 > 0 \Rightarrow$ phân thức có GTLN khi $-4x^2 + 4x$ có GTLN

Ta có: $-4x^2 + 4x = 1 - (2x - 1)^2$

Vì $-(2x - 1)^2 \leq 0$ nên $1 - (2x - 1)^2 \leq 1$

$\Rightarrow 1 - (2x - 1)^2$ có GTLN bằng 1 khi $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

\Rightarrow GTLN của phân thức $\frac{-4x^2+4x}{15}$ bằng $\frac{1}{15}$

Bài 3: Tìm GTLN của phân thức: $\frac{5}{x^2+2x+2}$

Hướng dẫn

Vì Tử thức là $5 > 0$ và mẫu thức $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$

\Rightarrow phân thức có GTLN khi $(x + 1)^2 + 1$ có GTNN

Vì $(x + 1)^2 \geq 0$ nên $(x + 1)^2 + 1 \geq 1$

$\Rightarrow (x + 1)^2 + 1$ có GTNN bằng 1 khi $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

\Rightarrow GTLN của phân thức $\frac{5}{x^2+2x+2}$ bằng 5 khi $x = -1$

Bài 4: Tìm GTLN của phân thức: $\frac{3}{2+|2x-5|}$

Hướng dẫn

Vì Tử thức là $3 > 0$ và mẫu thức $2 + |2x - 5| > 0$

\Rightarrow phân thức có GTLN khi $2 + |2x - 5|$ có GTNN

Vì $|2x - 5| \geq 0$ nên $2 + |2x - 5| \geq 2$

$\Rightarrow 2 + |2x - 5|$ có GTNN bằng 2 khi $2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

\Rightarrow GTLN của phân thức $\frac{3}{2 + |2x - 5|}$ bằng $\frac{3}{2}$ khi $x = \frac{5}{2}$

Bài 5: Tìm GTNN của các phân thức

a) $\frac{x^2 + 4x + 6}{3}$

b) $\frac{4 + 2|1 - 2x|}{15}$

Bài 6: Tìm GTLN của các phân thức

a) $\frac{12}{3 + |5x + 1| + |2y - 1|}$

b) $\frac{5}{4x^2 + 4x + 2y + y^2 + 3}$

DẠNG 5: Tìm giá trị nguyên của biến để phân thức nhận giá trị nguyên.

I/ Phương pháp.

Với phân thức $\frac{a}{f(x)}$ (tử thức a là số nguyên)

Bước 1: Tìm điều kiện để $f(x) \neq 0$

Bước 2: Phân thức $\frac{a}{f(x)}$ nhận giá trị nguyên thì $f(x)$ phải là Ước của số a

Bước 3: Giải $f(x) = U(a)$ để tìm x .

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1. Tìm các giá trị nguyên của biến để phân thức sau nhận giá trị nguyên: $\frac{3}{x^2 + x + 1}$

Bài 2. Tìm các giá trị nguyên của biến để phân thức sau nhận giá trị nguyên: $\frac{6}{x - 3}$;

Bài 3. Tìm các giá trị nguyên của biến để các phân thức sau nhận giá trị nguyên: $\frac{2}{1 + |2x - 1|}$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

PHÂN THỨC BẰNG NHAU.

Bài 1. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{3y}{4} = \frac{6xy}{8x} \quad (x \neq 0) & \text{b) } \frac{-3x^2}{2y} = \frac{3x^2}{-2y} \quad (y \neq 0) & \text{c) } \frac{2(x-y)}{3(y-x)} = \frac{-2}{3} \quad (x \neq y) \\ \text{d) } \frac{2xy}{3a} = \frac{8xy^2}{12ay} \quad (a \neq 0, y \neq 0) & \text{e) } \frac{1-x}{2-y} = \frac{x-1}{y-2} \quad (y \neq 2) & \text{f) } \frac{2a}{-5b} = \frac{-2a}{5b} \quad (b \neq 0) \end{array}$$

Bài 2. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{x-2}{-x} = \frac{2^3 - x^3}{x(x^2 + 2x + 4)} \quad (x \neq 0) & \text{b) } \frac{3x}{x+y} = \frac{-3x(x-y)}{y^2 - x^2} \quad (x \neq \pm y) \\ \text{c) } \frac{x+y}{3a} = \frac{3a(x+y)^2}{9a^2(x+y)} \quad (a \neq 0, x \neq -y) & \end{array}$$

Bài 3. Với những giá trị nào của x thì hai phân thức sau bằng nhau: $\frac{x-2}{x^2-5x+6}$ và $\frac{1}{x-3}$

Bài 4. Cho hai phân thức $A = \frac{(2x+1)(x-2)}{3(2x+1)}$, $B = \frac{x-2}{3}$. Hãy xét sự bằng nhau của chúng trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } x \in N \qquad \text{b) } x \in Z \qquad \text{c) } x \in Q$$

Bài 5. Cho ba phân thức $A = \frac{x+1}{5}$, $B = \frac{(x+1)(x+2)}{5(x+2)}$, $C = \frac{(x+1)(3x-2)}{5(3x-2)}$. Hãy xét sự bằng nhau của chúng trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } x \in N \qquad \text{b) } x \in Z \qquad \text{c) } x \in Q$$

TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ PHÂN THỨC CÓ NGHĨA.

Bài 1. Tìm điều kiện xác định của phân thức:

$$\text{a) } \frac{x^2-4}{9x^2-16} \qquad \text{b) } \frac{2x-1}{x^2-4x+4} \qquad \text{c) } \frac{x^2-4}{x^2-1}$$

d) $\frac{5x-3}{2x^2-x}$

e) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-1}$

f) $\frac{2}{(x+1)(x-3)}$

g) $\frac{2x+1}{x^2-5x+6}$

Bài 2. Tìm điều kiện xác định của phân thức:

a) $\frac{1}{x^2+y^2}$

b) $\frac{x^2y+2x}{x^2-2x+1}$

c) $\frac{5x+y}{x^2+6x+10}$

d) $\frac{x+y}{(x+3)^2+(y-2)^2}$

TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ THÂN THỨC BẰNG 0, KHÁC 0

Bài 1. Tìm các giá trị của biến số x để phân thức sau bằng không:

a) $\frac{2x-1}{5x-10}$

b) $\frac{x^2-x}{2x}$

c) $\frac{2x+3}{4x-5}$

d) $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-4x+3}$

e) $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-4x+3}$

f) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

Bài 2. Tìm các giá trị của biến số x để phân thức sau bằng không:

a) $\frac{x^2-4}{x^2+3x-10}$

b) $\frac{x^3-16x}{x^3-3x^2-4x}$

c) $\frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x-3}$

Bài 3. Tìm các giá trị của biến số x để phân thức sau khác không:

a) $\frac{x-1}{2x-10}$

b) $\frac{x^2-2x}{2x-1}$

c) $\frac{x+3}{4x-7}$

CHỨNG MINH MỘT PHÂN THỨC LUÔN CÓ NGHĨA.

Bài 1. Chứng minh các phân thức sau luôn có nghĩa:

a) $\frac{3}{x^2+1}$

b) $\frac{3x-5}{(x-1)^2+2}$

c) $\frac{5x+1}{x^2+2x+4}$

d) $\frac{x^2-4}{-x^2+4x-5}$

e) $\frac{x+5}{x^2+x+7}$

Bài 2. Chứng minh các phân thức sau luôn có nghĩa:

$$\text{a) } \frac{x+y}{x^2+2y^2+1}$$

$$\text{b) } \frac{4}{x^2+y^2-2x+2}$$