CHỦ ĐỀ 9. ĐA GIÁC , ĐA GIÁC ĐỀU

A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1/ Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.

2/ Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

VD1: Tam giác đều có 3 cạnh bằng nhau và ba góc bằng nhau bằng 60^o

VD2: Tứ giác đều (Hình vuông) có 4 cạnh bằng nhau và bốn góc bằng nhau bằng 90^o

3/ Bổ sung

+ Tổng các góc trong của đa giác n cạnh (n > 2) là $(n - 2).180^o$

+ Số đường chéo của một đa giác n cạnh (n > 2) là $\frac{(n-3).n}{2}$.

+ Tổng các góc ngoài của đa giác n cạnh (n > 2) là 360^o (tại mỗi đỉnh chỉ chọn một góc ngoài).

+ Trong một đa giác đều, giao điểm O của hai đường phân giác của hai góc kề một cạnh là tâm của đa giác đều. Tâm O cách đều các đỉnh, cách đều các cạnh của đa giác đều. Có một đường tròn tâm O đi qua các đỉnh của đa giác đều gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho hình thoi ABCD có góc $\angle A = 60^o$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng đa giác EBFGDH là lục giác đều

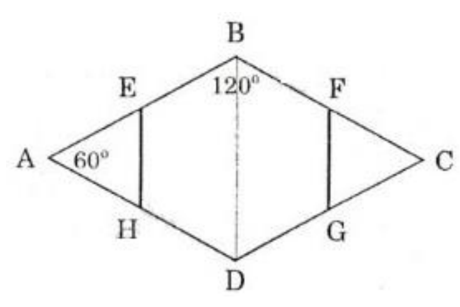
Giải

ABCD là hình thoi có $\angle A = 60^o \Rightarrow \angle B = \angle D = 120^o$

ΔAEH là tam giác đều (Vì tam giác cân có một góc 60^o)

$\Rightarrow \angle E = \angle H = 120^o$

Tương tự**:** $\angle F = \angle G = 120^o$



Vậy EBFGDH có tất cả các góc bằng nhau, mặt khác EBFGDH cũng có tất cả các cạnh bằng nhau (bằng nửa cạnh hình thoi).

Vậy EBFGDH là một lục giác đều.

Ví dụ 2. Tìm số cạnh của một đa giác biết số đường chéo hơn số cạnh là 7.

Giải

Tìm cách giải.

Bài này biết mối liên hệ giữa số đường chéo và số cạnh nên hiển nhiên chúng ta đặt số cạnh của đa giác là **n** biểu thị số đường chéo là $\frac{n(n-3)}{2}$ từ đó ta tìm được số cạnh.

Trình bày lời giải

Đặt số cạnh của đa giác là n ($n \geq 3$) thì số đường chéo là $\frac{n(n-3)}{2}$ theo đề bài ta có:

$$\frac{n(n-3)}{2} - n = 7 \Leftrightarrow n^2 - 5n - 14 = 0 \Leftrightarrow (n+2)(n-7) = 0$$

Vì $n \geq 3$ nên $n - 7 = 0 \Leftrightarrow n = 7$. Vậy số cạnh của đa giác là 7.

Ví dụ 3. Tổng tất cả các góc trong và một góc ngoài của một đa giác có số đo là $47058,5^0$. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

Giải

Tìm cách giải.

Nếu ta đặt n là số cạnh , α là số đo một góc ngoài của đa giác thì $0^0 < \alpha < 180^0$ và $(n - 2).180^0$ là một số nguyên. Do đó suy ra $(n-2).180^0 + \alpha = 47058,5^0$, từ đó ta có α là số dư của $47058,5^0$ chia cho 180^0. Bằng cách suy luận như vậy, chúng ta có lời giải sau:

Trình bày lời giải

Gọi n là số cạnh của đa giác ($n \in N$, $n \geq 3$).

Tổng số đo các góc trong của đa giác bằng $(n-2).180^0$.

Vì tổng các góc trong và một trong các góc ngoài của đa giác có số đo là $47058,5^0$ nên ta có

$(n-2).180^0 + \alpha = 47058,5^0$ (α là số đo một góc ngoài của đa giác với $0^0 < \alpha < 180^0$)

$\Rightarrow (n-2).180^0 + \alpha = 261.180^0 + 78,5^0$

$\Rightarrow n - 2 = 261 \Rightarrow n = 263.$

Vậy số cạnh của đa giác là 263.

Ví dụ 4. Tổng số đo các góc của một đa giác n - cạnh trừ đi góc A của nó bằng 570^0. Tính số cạnh của đa giác đó và $\hat{A}$.

Giải

Tìm cách giải.

Theo công thức tính tổng các góc trong ta có $(n - 2).180^0 - \hat{A} = 570^0$. Quan sát và nhìn nhận, ta có thể nhận thấy chỉ có thêm điều kiện là $n \in N$, $n \geq 3$ và $0^0 < \hat{A} < 180^0$. Từ đó ta có lời giải sau:

Trình bày lời giải

Ta có (n - 2). 180^0 – A = 570^0 $\Leftrightarrow$ A = (n - 2).180^0 – 570^0.

Vì $0^0 <$ A $< 180^0$ $\Rightarrow$ 0 < (n - 2). 180^0 – 570^0 < 180^0. $\Leftrightarrow$ 570^0 < (n - 2). 180^0 < 750^0

$$\Leftrightarrow \frac{19}{6} < n - 2 < \frac{25}{6} \Leftrightarrow 5\frac{1}{6} < n < 6\frac{1}{6}\ .$$

Vì n $\in$ N nên n = 6.

Đa giác đó có 6 cạnh và A = (6 - 2). 180^0 – 570^0 = 150^0.

Ví dụ 5. Một lục giác đều và một ngũ giác đều chung cạnh AD (như hình vẽ). Tính các góc của tam giác ABC.

Giải

Tìm cách giải.

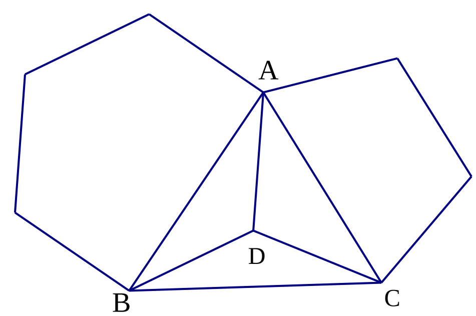
Vì AD là cạnh của lục giác đều và ngũ giác đều, nên dễ dàng nhận ra ΔABD, ΔACD, ΔBCD là các tam giác cân đỉnh D và tính được số đo các góc ở đỉnh. Do vậy ΔABC sẽ tính được số đo các góc.

Trình bày lời giải

Theo công thức tính góc của đa giác đều, ta có:

$$ADB = \frac{(6-2).180^0}{6} = 120^0 \Rightarrow DAB = DBA = 30^0;$$

$$ADC = \frac{(5-2)180^0}{5} = 108^0 \Rightarrow DAC = DCA = 36^0;$$



Suy ra $BDC = 360^0 - 120^0 - 108^0 = 132^0$.

Ta có ΔBDC (DB = DC) cân tại D. Do đó

$$DBC = DCB = \frac{180^0 - 132^0}{2} = 24^0\ .$$

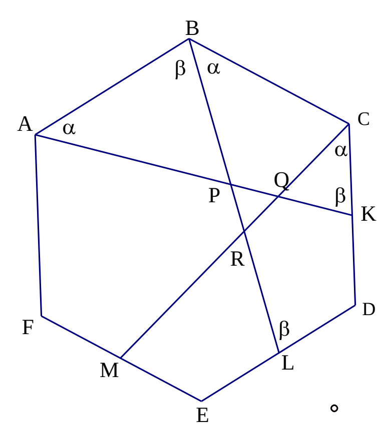
Suy ra $BAC = 30^0 + 36^0 = 66^0;\ ABC = 30^0 + 24^0 = 54^0;\ BCA = 24^0 + 36^0 = 60^0$.

Ví dụ 6. Cho lục giác đều ABCDEF. Gọi M, L, K lần lượt là trung điểm EF, DE, CD. Gọi giao điểm của AK với BL và CM lần lượt là P, Q. Gọi giao điểm của CM và BL là R. Chứng minh tam giác PQR là tam giác đều.

Giải

Các tứ giác ABCK, BCDL, CDEM có các cạnh và các góc đôi một bằng nhau. Các góc của lục giác đều bằng 120^0.

Đặt $BAK = \alpha \Rightarrow CBL = DCM = \alpha$; $LBA = \beta$.



$LBA = \beta \Rightarrow CKA = EMC = DLB = \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 120^0$

Trong tam giác CKQ có $CQK + \alpha + \beta = 180^0 \Rightarrow CKQ = 60^0$

Trong tam giác PBA có $APB + \alpha + \beta = 180^0 \Rightarrow APB = 60^0$

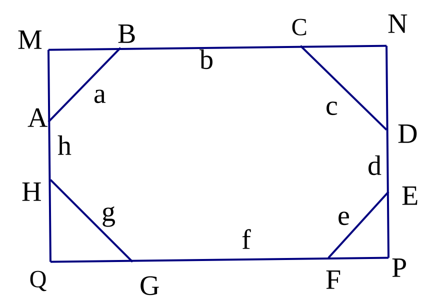
Từ đó suy ra $RQP = RPQ = 60^0$ Vậy ΔPQR đều.

Ví dụ 7. Cho bát giác ABCDEFGH có tất cả các góc bằng nhau, và độ dài các cạnh là số nguyên. Chứng minh rằng các cạnh đối diện của bát giác bằng nhau.

Giải

Các góc của bát giác bằng nhau, suy ra số đo của mỗi góc là $\dfrac{(8-2)180^0}{8} = 135^0$.

Kéo dài cạnh AH và BC cắt nhau tại M. Ta có:



$$MAB = MBA = 180^0 - 135^0 = 45^0$$

suy ra tam giác MAB là tam giác vuông cân.

Tương tự các tam giác CND, EBF, GQH cũng là các tam giác vuông cân, suy ra MNPQ là hình chữ nhật.

Đặt AB = a; BC = b; CD = c; DE = d; EF = e; FG = f; GH = g; HA = h.

Từ các tam giác vuông cân, theo định lí Py-ta-go, ta có:

$$MB = \frac{a}{\sqrt{2}}, CN = \frac{c}{\sqrt{2}} \text{ nên } MN = \frac{a}{\sqrt{2}} + b + \frac{c}{\sqrt{2}}$$

Tương tự $PQ = \dfrac{e}{\sqrt{2}} + f + \dfrac{g}{\sqrt{2}}$. Do MN = PQ nên

$$\frac{a}{\sqrt{2}} + b + \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{e}{\sqrt{2}} + f + \frac{g}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(a + c - e - g) = f - b.$$

Do f và b là số nguyên nên vế phải của đẳng thức trên là số nguyên, do đó vế trái là số nguyên. Vế trái chỉ có thể bằng 0, tức là f = b, hay BC = FG.

Tương tự có AB = EF, CD = GH, DE = HA.

Nhận xét. Dựa vào tính chất số hữu tỷ, số vô tỷ chúng ta đã giải được bài toán trên. Cũng với kỹ thuật đó, chúng ta có thể giải được bài thi hay và khó sau: Cho hình chữ nhật ABCD. Lấy E, F thuộc cạnh AB; G, H thuộc cạnh BC; I, J thuộc cạnh CD; K, M thuộc cạnh DA sao cho hình 8 - giác EFGHIJKM có các góc bằng nhau. Chứng minh rằng nếu độ dài các cạnh của hình 8 - giác EFGHIJKM là các số hữu tỉ thì EF = IJ.

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, tỉnh Hưng Yên, năm học 2009 - 2010)

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

10.1. Số đường chéo của một đa giác lớn hơn 14, nhưng nhỏ hơn 27. Hỏi đa giác đó bao nhiêu cạnh?

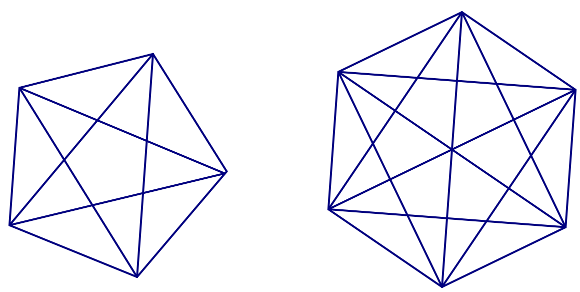
10.2. Tổng số đo các góc của một đa giác n - cạnh trừ đi góc A của nó bằng 2570^0. Tính số cạnh của đa giác đó và A.

10.3. Cho ΔABC có ba góc nhọn và M là điểm bất kì nằm trong tam giác. Gọi $A_1;B_1;C_1$ là các điểm đối xứng với M lần lượt qua trung điểm các cạnh BC, CA, AB.

a) Chứng minh các đoạn $AA_1;BB_1;CC_1$ cùng đi qua một điểm.

b)Xác định vị trí điểm M để lục giác $AB_1CA_1BC_1$ có các cạnh bằng nhau.

10.4. Một ngũ giác đều có 5 đường chéo và nhóm 5 đường chéo này chỉ có một loại độ dài (ta gọi một loại độ dài là một nhóm các đường chéo bằng nhau). Một lục giác đều có 9 đường chéo và nhóm 9 đường chéo này có 2 loại độ dài khác nhau (hình vẽ).



Xét đa giác đều có 20 cạnh. Hỏi khi đó nhóm các đường chéo có bao nhiêu loại độ dài khác nhau?

10.5. Cho ngũ giác lồi ABCDE có tất cả các cạnh bằng nhau và $ABC = 2DBE$. Hãy tính ABC.

10.6. Cho ngũ giác ABCDE có các cạnh bằng nhau và $A = B = C$.

a) Chứng minh tứ giác ABCD là hình thang cân.

b) Chứng minh ngũ giác ABCDEF là ngũ giác đều.

10.7. Cho ngũ giác ABCDE, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, EA và I, J lần lượt là trung điểm của MP, NQ. Chứng minh rằng IJ song song với ED và $IJ = \frac{ED}{4}$.

10.8. Cho lục giác đều ABCDEF. Gọi A', B',C',D',E',F' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC,CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng A'B'C'D'E'F' là lục giác đều.

10.9. Cho lục giác lồi ABCDEF có các cặp cạnh đối AB và DE; BC và EF; CD và AE vừa song song vừa bằng nhau. Lục giác ABCDEF có nhất thiết là lục giác đều hay không?

10.10. Chứng minh rằng trong một ngũ giác lồi bất kì luôn tìm được ba đường chéo có độ dài là ba cạnh của một tam giác.

10.11. Chứng minh rằng tổng độ dài các cạnh của một ngũ giác lồi bé hơn tổng độ dài các đường chéo của nó.

10.12. Muốn phủ kín mặt phẳng bởi những đa giác đều bằng nhau sao cho hai đa giác kề nhau thì có chung một cạnh. Hỏi các đa giác đều này có thể nhiều nhất bao nhiêu cạnh?

10.13. Cho lục giác ABCDEF có tất cả các góc bằng nhau, các cạnh đối không bằng nhau. Chứng minh rằng $\left|BC-EF\right|=\left|DE-AB\right|=\left|AF-CD\right|$. Ngược lại nếu có 6 đoạn thẳng thỏa mãn điều kiện ba hiệu trên bằng nhau và khác 0 thì chúng có thể lập được một lục giác có các góc bằng nhau.

10.14. Chứng minh rằng trong một lục giác bất kì, luôn tìm được một đỉnh sao cho ba đường chéo xuất phát từ đỉnh đó có thể lấy làm ba cạnh của một tam giác.

10.15. Cho lục giác ABCDEG có tất cả các cạnh bằng nhau $A+C+E=B+D+G$. Chứng minh rằng các cặp cạnh đối của lục giác song song với nhau.